

1. Rozwiązać równanie

$$\left(|8 + 6j| \cdot \frac{-1+2j}{2-j}\right)^2 = z^4$$

$$4 \cdot \left(\frac{8+9j}{1-2j} - |6 + 8j|\right)^2 = z^4$$

$$((2-3j) \cdot (z+3\bar{z}) - 2j+5) \cdot \left(27\left(\sin \frac{\pi}{8} + j \cos \frac{-\pi}{8}\right) z^3 - 64\left(\cos \frac{9\pi}{8} + j \sin \frac{9\pi}{8}\right)\right) = 0$$

2. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \left|z + 2i - \operatorname{Re}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{84}\right| \leq \left|\frac{1+7j}{1+j}\right|\right\}$$

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \operatorname{Im}\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right)^{39}\right] + j\right| \geq \left|z - \frac{2+4j}{j-1}\right|\right\}$$

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{3}{4}\pi \geq \arg(3-3j)z^2 > \frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{3}{2}\pi \geq \arg \frac{z-j}{1-2j} > \pi\right\}$$

3. Rozłożyć na ułamki proste $\frac{z+5}{(z+i)^2}$ w \mathbb{C} , $\frac{3+iz^2}{z^4-16}$ w \mathbb{C} , $\frac{10x+3}{x^3+27}$ w \mathbb{R} .

4. Wyznaczyć wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = x^4 + 4x^3 + cx^2 + dx + 100$, jeśli $W(j-3) = 0$ oraz $c, d \in \mathbb{R}$.

5. Sprawdzić czy schemat jest tautologią rachunku zdań

$$[q \vee (\sim r \Rightarrow q) \vee r \vee \sim p] \Rightarrow [(\sim p \wedge r) \vee (p \Rightarrow q)]$$

$$[(p \Rightarrow r) \wedge \sim (\sim q \vee p)] \Rightarrow [q \wedge \sim (r \Rightarrow \sim q) \wedge (r \Rightarrow p)]$$

6. Wykazać, że schemat nie jest prawem rachunku kwantyfikatorów:

$$\forall x \exists y \varphi(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x \varphi(x, y)$$

$$\exists x \exists y \varphi(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x \varphi(x, y)$$

7. Udowodnić równość

lub podać kontrprzykład i sformułować warunek konieczny i dostateczny, aby była prawdziwa

$$(A - B) \cup (C - A) = [(A \div B) \cup C] - A \cap B \cap C$$

$$B - (C - A) = [(C \cup B) \div A] \cup (A \cap B)$$

$$[(A \div B) - C] \cup [B \cap (A \cap C)'] = (A \cup B) \div C$$

8. Zapisać zdanie "Jeżeli suma dwóch liczb jest liczbą nieparzystą, to dokładnie jeden ze składników jest liczbą nieparzystą" używając symboli logicznych, nawiasów, symboli '=' i '+' oraz zmiennych naturalnych.
Zapisać zdanie "Jeżeli iloczyn dwóch liczb jest liczbą nieparzystą, to co najmniej jeden z czynników jest liczbą nieparzystą" używając symboli logicznych, nawiasów, symboli '=', '.', i '+' oraz zmiennych naturalnych.

9. Dla jakich $n \in \mathbb{N}_+$ prawdziwa jest dana nierówność? Sformułować hipotezę i udowodnić ją indukcyjnie.

$$2^n > n^2 - 2n$$

$$3^n > n^2 + 2n - 4$$

10. Zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiory A_1 , A_3 , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$ i $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} A_n$

$$\text{jeśli } A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : n|x| - n \leq y \leq -n|x| + n\}$$

Zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiory A_0 , A_1 , A_2 , $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$ i $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} A_n$

$$\text{jeśli } A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq n(x-1)(x+1)\}.$$

11. Wyznaczyć $\bigcup_a \bigcap_b X_{a,b}$, $\bigcap_a \bigcup_b X_{a,b}$, $\bigcap_b \bigcup_a X_{a,b}$, $\bigcup_b \bigcap_a X_{a,b}$ dla podanych rodzin zbiorów:

$$X_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq ax - b(a-1)\} \text{ dla } a, b \in \mathbb{R}$$

$$X_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq ax(x-b)\} \text{ dla } a, b \in \mathbb{R}$$

$$X_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax(x-b)(x+b)\} \text{ dla } a, b > 0,$$

$$X_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x-a)3 + ab\} \text{ dla } a, b \in \mathbb{R}$$